یک تساوی و چند نامساوی

اشاره

گوتفرید ویلهلم لایب‌نیتس[۱]، **فیلسوف، ریاضی‌دان و فیزیک‌دان شهیر آلمانی کارهای مهمی در زمینهٔ محاسبات دیفرانسیل و انتگرال انجام داد. در هندسه نیز قضیه‌ای منسوب به اوست که رابطهٔ میان فاصلهٔ یک نقطه تا مرکز یک مثلث را برحسب اضلاع و فاصلهٔ آن نقطه تا رئوس مثلث بیان می‌کند. هر چند اثبات‌های جبری متعددی برای این قضیه موجود است، اما در اینجا قصد داریم این قضیه را به روش هندسی اثبات کنیم و چند نامساوی مهم را از آن نتیجه بگیریم.**

کلیدواژه‌ها: قضیهٔ لایب نیتس، نامساوی لایب‌نیتس، نامساوی اویلر

محمد طبیعی*
دانش‌آموز سال چهارم رشتهٔ ریاضی
دبیرستان علامه طباطبایی تهران

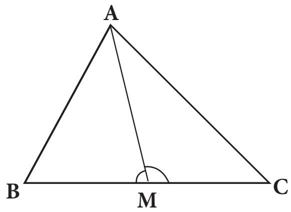
قضیهٔ لایب‌نیتس: فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در صفحه و G مرکز ثقل مثلث ABC باشد. در این صورت برابری زیر برقرار است:

$$۳MG^۲ = MA^۲ + MB^۲ + MC^۲ - \frac{۱}{۳}(AB^۲ + AC^۲ + BC^۲)$$

قبل از بیان اثبات این مسئله لم زیر را مطرح می‌کنیم.

لم: در مثلث ABC اگر AM میانهٔ وارد بر BC باشد، داریم:

$$AM^۲ = \frac{AB^۲ + AC^۲}{۲} - \frac{BC^۲}{۴}$$

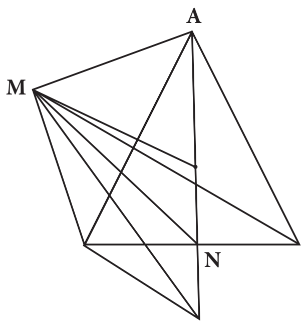


شکل ۱

برای اثبات لم فوق قضیهٔ کسینوس‌ها را در دو مثلث AMB و AMC نوشته و با توجه به اینکه $\cos(A\hat{M}C) = -\cos(A\hat{M}B)$ و از جمع دو رابطه، به حکم برسید.

حال قصد داریم قضیهٔ داده شده را با استفاده از لم مطرح شده اثبات کنیم. مطابق شکل، فرض کنید N وسط BC است. از آنجا که G نقطهٔ همرسی میانه‌هاست، AG=۲GN. حال GN را به اندازهٔ خودش امتداد دهید تا به ´G برسید. سپس از M به A و B و C و G و N و ´G وصل کنید.

از آنجا که $\frac{AG}{GN} = ۲$ پس ۲GN=GG´=AG



شکل ۲

لذا در مثلث $\overset{\Delta}{AMG'}$، MG میانه است پس بنابر لم گفته شده داریم:

$$MG^۲ = \frac{MA^۲ + MG'^۲}{۲} - \frac{AG'^۲}{۴} \quad (۱)$$

از طرفی می‌دانیم N وسط ´GG قرار دارد پس باز هم با استفاده از لم مذکور داریم:

$$MN^۲ = \frac{MG^۲ + MG'^۲}{۲} - \frac{GG'^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{MG'^۲}{۲} = MN^۲ - \frac{MG^۲}{۲} + \frac{GG'^۲}{۴} \quad (۲)$$

همچنین N در وسط BC نیز واقع است لذا می‌توان نوشت:

$$MN^۲ = \frac{MB^۲ + MC^۲}{۲} - \frac{BC^۲}{۴} \quad (۳)$$

حال در تساوی (۲) به‌جای $MN^۲$ مقدار $\frac{MB^۲ + MC^۲}{۲} - \frac{BC^۲}{۴}$

را قرار دهید، پس خواهیم داشت:

$$\frac{MG'^{۲}}{۲}=\frac{MB^{۲}+MC^{۲}}{۲}-\frac{MG^{۲}}{۲}-\frac{BC^{۲}}{۴}+\frac{GG'^{۲}}{۴}$$

اکنون اگر در تساوی (۱) به‌جای $\frac{MG'^{۲}}{۲}$ مقدار به‌دست آمده در بالا را جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$MG^{۲}=\frac{MA^{۲}+MB^{۲}+MC^{۲}}{۲}-\frac{MG^{۲}}{۲}-\frac{BC^{۲}}{۴}+\frac{GG'^{۲}}{۴}-\frac{AG'^{۲}}{۴}\quad (۴)$$

حال با توجه به اینکه AG=GG´ پس AG´=۲AG، در نتیجه

$$\frac{GG'^{۲}}{۴}-\frac{AG'^{۲}}{۴}=-\frac{۳}{۴}AG^{۲}$$

از طرفی می‌دانیم $\frac{AG}{AN}=\frac{۲}{۳}$ پس $\frac{GG'^{۲}}{۴}-\frac{AG'^{۲}}{۴}=-\frac{AN^{۲}}{۳}$

همچنین با توجه به اینکه N وسط BC است، پس $AN^{۲}=\frac{AB^{۲}+AC^{۲}}{۲}-\frac{BC^{۲}}{۴}$ در نتیجه می‌توان گفت:

$$\frac{GG'^{۲}}{۴}-\frac{AG'^{۲}}{۴}=-\frac{AN^{۲}}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{GG'^{۲}}{۴}-\frac{AG'^{۲}}{۴}=\frac{BC^{۲}}{۱۲}-\left(\frac{AB^{۲}+AC^{۲}}{۶}\right)\quad (۵)$$

حال با جایگذاری تساوی (۵) در تساوی (۴) خواهیم داشت:

$$MG^{۲}=\frac{MA^{۲}+MB^{۲}+MC^{۲}}{۲}-\frac{MG^{۲}}{۲}-\frac{BC^{۲}}{۴}+\frac{BC^{۲}}{۱۲}-\left(\frac{AB^{۲}+AC^{۲}}{۶}\right)$$

پس

$$\frac{۳}{۲}MG^{۲}=\frac{MA^{۲}+MB^{۲}+MC^{۲}}{۲}-\left(\frac{AB^{۲}+BC^{۲}+AC^{۲}}{۶}\right)$$

لذا با ضرب طرفین تساوی در عدد ۲ داریم:

$$۳MG^{۲}=MA^{۲}+MB^{۲}+MC^{۲}-\frac{۱}{۳}(AB^{۲}+BC^{۲}+AC^{۲})$$

حال به نتایج جالب توجه زیر از این قضیه توجه کنید:

نامساوی (۱): مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ مفروض است. M نقطه دلخواهی در صفحه است آنگاه:

$$MA^{۲}+MB^{۲}+MC^{۲}\ge\frac{۱}{۳}(AB^{۲}+BC^{۲}+AC^{۲})$$

و حالت تساوی تنها زمانی برقرار است که M بر G منطبق باشد.

اثبات: بنابر قضیه لایب‌نیتس داریم:

$$MA^{۲}+MB^{۲}+MC^{۲}=۳MG^{۲}+\frac{۱}{۳}(AB^{۲}+AC^{۲}+BC^{۲})$$

حال از آنجا که $۳MG^{۲}\ge ۰$ پس

$$MA^{۲}+MB^{۲}+MC^{۲}\ge\frac{۱}{۳}(AB^{۲}+AC^{۲}+BC^{۲})$$

و حالت تساوی تنها زمانی رخ می‌دهد که $۳MG^{۲}=۰$ یا به‌عبارت دیگر M و G برهم منطبق باشند.

نامساوی (۲): مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با شعاع دایره محیطی R مفروض است. آنگاه خواهیم داشت:

$۹R^{۲}\ge BC^{۲}+AC^{۲}+AB^{۲}$ (نامساوی لایب‌نیتس)

اثبات: در قضیه لایب‌نیتس قرار دهید M=O آنگاه خواهیم داشت:

$$OG^{۲}=R^{۲}-\left(\frac{AB^{۲}+AC^{۲}+BC^{۲}}{۹}\right)$$

$$=\frac{۹R^{۲}-AB^{۲}-AC^{۲}-BC^{۲}}{۹}$$

حال با توجه به اینکه $OG^{۲}\ge ۰$ پس $\frac{۹R^{۲}-AB^{۲}-AC^{۲}-BC^{۲}}{۹}\ge ۰$

لذا $۹R^{۲}\ge AB^{۲}+AC^{۲}+BC^{۲}$

نامساوی (۳): در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با شعاع دایره محیطی R و شعاع دایره محاطی r نامساوی زیر برقرار است: $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}\ge ۱۸Rr$

(a و b و c اضلاع مثلث‌اند)

اثبات: می‌دانیم $R=\frac{abc}{۴s}$ و $r=\frac{s}{p}$ پس

$$۱۸Rr=\frac{۹abc}{۲p}=\frac{۹abc}{a+b+c}$$

لذا باید ثابت کنیم که $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}\ge\frac{۹abc}{a+b+c}$

اما از آنجا که $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}\ge ۳\sqrt[۳]{a^{۲}b^{۲}c^{۲}}$ و $a+b+c\ge ۳\sqrt[۳]{abc}$ پس $(a+b+c)(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})\ge ۹abc$ و نامساوی اثبات می‌گردد.

نامساوی (۴): در مثلث ABC با شعاع دایره محیطی R و شعاع دایره محاطی r نامساوی $R\ge ۲r$ برقرار است. (نامساوی اویلر)

اثبات: از نامساوی‌های (۲) و (۳) داریم

$$۹R^{۲}\ge AB^{۲}+AC^{۲}+BC^{۲}\ge ۱۸Rr$$

پس $۹R^{۲}\ge ۱۸Rr \Rightarrow R\ge ۲r$

پی‌نوشت

1. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

htabiee@yahoo.com

منابع

۱. دایرةالمعارف هندسه. جلد پنجم. مؤلف: محمدهاشم رستمی. انتشارات مدرسه.
۲. بازآموزی و بازشناخت هندسه. مؤلفان: هـ.س.م.کوکس تیر ـ س.ل. گریتزر. مترجم عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۳. هندسه مسطحه از مقدمات تا المپیاد. مؤلفان: سیامک احمدپور، مصطفی مسگری مشهدی، انتشارات خوشخوان.